极限与连续 习题课

一. 内容与要求

1. 了解极限的两个存在准则并会应用

2. 会用两个重要极限求极限

3．掌握无穷小的比较与无穷小阶的估计,会利用等价无穷小替换求极限

4．理解函数在一点连续、间断的概念，会判断间断点的类型

5. 了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质

知识要点：

1. 两个准则：夹逼准则、单调有界必有极限准则

2. 两个重要极限(一般形式)

$1^0\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\qquad 2^0\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

3.若：$u(x)\to 1, v(x)\to\infty, (1^{\infty})$

$$\because \lim u(x)^{v(x)}=\lim\left[(1+u(x)-1)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right]^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

4. 常用的等价无穷小关系

$x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x\ ,\quad \tan x \sim x,\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2\ ,$$

$$\arcsin x \sim x,\quad \arctan x \sim x,$$

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x\quad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x\quad (n \in N^+)$$

$$\ln(1+x) \sim x\ ,\quad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}(a>0,\neq 1)$$

$$e^x-1 \sim x,\quad a^x-1 \sim x\ln a(a>0,\neq 1)$$

注： 以上各式中的x都可换成任意无穷小$u(x)$.

5. 间段点的判别方法:

间断点存在:(1)函数无定义点(分母为零的点)

(2)分段函数的分段点可能是间断点

间断点的类型:

$$
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}\text{第一类间断点}\begin{pmatrix} f(x_0-0), f(x_0+0)\text{存在且相等}\\ f(x_0-0), f(x_0+0)\text{存在但不等}\end{pmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}\text{第二类间断点}\begin{pmatrix} f(x_0-0), f(x_0+0)\text{至少有一为}\infty\\ \text{其它}\end{pmatrix}
\end{cases}
$$

6. 求极限，常用方法如下：

（1） 利用极限的运算性质

（2） 利用函数的连续性

（3） 利用极限存在两个准则

（4） 利用两个重要极限

（5） 利用等价无穷小代换

（6） 利用左右极限

（7） 利用变量代换

7.判断极限不存在的方法：

(1). 子列（数列). (2).左、右极限.(3). 函数列.

二.典型例题

1. 求极限

$$(1).\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$$

$$(2).\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geq 0)$$

两个常用的极限

(1) 若 $|q| < 1$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$；

(2) 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，那么 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$

例 设 $x_n = (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

思考：设 a,b,c,d 均为正数，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n} =$$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\,(x\geq 0)$

解

注： 设$a_i>0,(i=1,2,\cdots m.)$,

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n\cdots+a_m{}^n}$

2 设$a > 0,\ a_1 > 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{a}{a_n}),\ n = 0,1,2,\cdots$

试证$\{a_n\}$收敛, 并求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. 求极限

$$(1).\ \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\quad(a\neq n\pi)$$

$$(2).\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}\qquad(a>0,b>0,c>0)$$

$$(3).\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$$

4．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+\sin^2 x)-x}{\ln(e^{2x}+x^2)-2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\ (m.n\in N^+)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\beta x}{\ln\cos\alpha x}\quad(\alpha,\beta\neq 0)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

5．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

6.(1).求$x\to 1^+$时, $f(x)=\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$

是$x-1$的几阶无穷小?

(2)$x\to 0$时$f(x)=e^{x^2}-\cos x$是x的几阶无穷小?

7 设$f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,讨论间断点及类型

1.10 总习题1(7).

8.(1) 讨论$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}\ (x\geq 0)$的连续性.

(2).设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}$为连续函数，求$a,b$

9 设 $f(x)\in C_{[a,b]}, a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,

证明$\exists\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=\dfrac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]$

10.设$f(x)\in C_{[0,2a]}$,且$f(0)=f(2a)$,,证明:$\exists\xi\in[0,a]$,

使得$f(\xi)=f(a+\xi)$.